1. 円に内接する四角形 ABPC は次の条件（イ)、(ロ）を満たすとする。

(イ) 三角形 ABC は正三角形である。

(ロ) AP と BC の交点は線分 BC を $p:(1-p)$ $(0<p<1)$ の比に内分する。

このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}},\ p$ を用いて表せ。

三角形 ABC の一辺の長さを 1 としても一般性は失われないので、以下ではそのように考える。
AP と BC の交点を D とする。
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
余弦定理より
$AD^2=AB^2+BD^2-2\cdot AB\cdot BD\cos 60^\circ$
$=1+p^2-p$
よって
$AD=\sqrt{p^2-p+1}$
方べきの定理より
$DA\cdot DP=DB\cdot DC$
$\sqrt{p^2-p+1}\cdot DP=p(1-p)$
$DP=\dfrac{p-p^2}{\sqrt{p^2-p+1}}$
$AP=AD+DP$
$=\dfrac{1}{\sqrt{p^2-p+1}}$
以上より
$\dfrac{AP}{AD}$
$=\dfrac{1}{p^2-p+1}$
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{AP}{AD}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$
$\boxed{=\dfrac{1-p}{p^2-p+1}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{p}{p^2-p+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

2. 実数 $x_1,\ \cdots,\ x_n\ (n \geqq 3)$ が条件 $x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1} > 0\ (2 \leqq k \leqq n-1)$ を満たすとし、$x_1,\ \cdots,\ x_n$ の最小値を m とする。このとき、$x_l = m$ となる $l\ (1 \leqq l \leqq n)$ の個数は 1 または 2 であることを示せ。

最初に最小値 m となるものを x_t とする。
$t = n$ のとき、l の個数は 1 である。
$t = n-1$ のとき、l の個数は 1 または 2 である。
以下では $t \leqq n-2$ のときを考える。
与えられた条件を変形して
$x_{k+1} > 2x_k - x_{k-1}$

(ア) $x_k = x_{k-1}$ のとき
$x_{k+1} > x_k$

(イ) $x_k > x_{k-1}$ のとき
$x_{k+1} > x_k + x_k - x_{k-1}$
$> x_k$

以上より、$x_{t+1} = x_t$ のときには $x_n > \cdots > x_{t+3} > x_{t+2} > x_{t+1} = x_t = m$ となり、l の個数は 2 である。
$x_{t+1} > x_t$ のときには $x_n > \cdots > x_{t+2} > x_{t+1} > x_t = m$ となり、l の個数は 1 である。

3. $\vec{a}=(1,0,0),\ \vec{b}=(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ, 0)$ とする。

(1) 長さ 1 の空間ベクトル $\vec{c}$ に対し、$\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c},\ \cos\beta=\vec{b}\cdot\vec{c}$ とおく。このとき、次の不等式（＊）が成り立つことを示せ

（＊）　$\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta \leqq \dfrac{3}{4}$

(2) 不等式（＊）を満たす $(\alpha,\ \beta)$ $(0\leqq\alpha\leqq 180^\circ,\ 0\leqq\beta\leqq 180^\circ)$ の範囲を図示せよ。

(1)

$\vec{c}=(x,y,z)$ とする。

$\cos\alpha=x$

$\cos\beta=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y$

（＊）の左辺 $=x^2-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}xy+\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}xy+\dfrac{3}{4}y^2$

$=\dfrac{3}{4}(x^2+y^2)$

$|\vec{c}|=1$ より

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$

$x^2+y^2+z^2=1$

$x^2+y^2=1-z^2\leqq 1$ なので

$\dfrac{3}{4}(x^2+y^2)\leqq\dfrac{3}{4}=$（＊）の右辺

となるので不等式（＊）は示された。

(2)

$\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta\leqq\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{\cos 2\alpha+1}{2}-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}+\dfrac{\cos 2\beta+1}{2}-\dfrac{3}{4}\leqq 0$

$\dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}+\dfrac{1}{4}\leqq 0$

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}+\dfrac{1}{4}\leqq 0$

$\{\cos(\alpha+\beta)-\dfrac{1}{2}\}\{\cos(\alpha-\beta)-\dfrac{1}{2}\}\leqq 0$

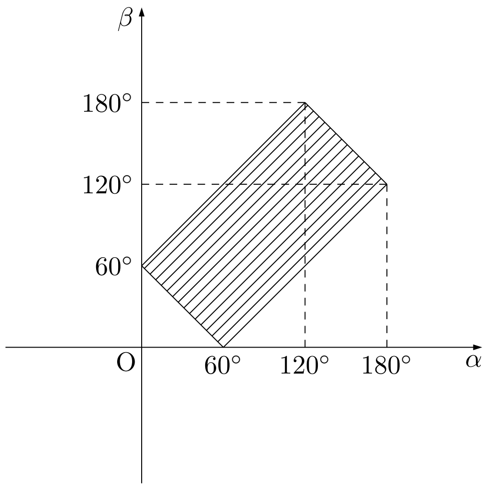
よって

$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)-\dfrac{1}{2}\geqq 0\\ \cos(\alpha-\beta)-\dfrac{1}{2}\leqq 0\end{cases}$ または $\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)-\dfrac{1}{2}\leqq 0\\ \cos(\alpha-\beta)-\dfrac{1}{2}\geqq 0\end{cases}$

$\begin{cases}0^\circ\leqq\alpha+\beta\leqq 60^\circ, 300^\circ\leqq\alpha+\beta\leqq 360^\circ\\ 60^\circ\leqq\alpha-\beta\leqq 180^\circ, -180^\circ\leqq\alpha-\beta\leqq -60^\circ\end{cases}$ または $\begin{cases}60^\circ\leqq\alpha+\beta\leqq 300^\circ\\ -60^\circ\leqq\alpha-\beta\leqq 60^\circ\end{cases}$

$\begin{cases}\beta\geqq-\alpha, \beta\leqq-\alpha+60^\circ, \beta\geqq-\alpha+300^\circ, \beta\leqq-\alpha+360^\circ\\ \beta\leqq\alpha-60^\circ, \beta\geqq\alpha-180^\circ, \beta\leqq\alpha+180^\circ, \beta\geqq\alpha+60^\circ\end{cases}$ または $\begin{cases}\beta\geqq-\alpha+60^\circ, \beta\leqq-\alpha+300^\circ\\ \beta\leqq\alpha+60^\circ, \beta\geqq\alpha-60^\circ\end{cases}$

以上を図示すると以下の通りである。



4. 三角形 ABC において辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ $a,\ b,\ c$ とする。この三角形 ABC は次の条件（イ)、(ロ)、（ハ）を満たすとする。

（イ）ともに 2 以上である自然数 p と q が存在して、$a = p+q,\ b = pq+p,\ c = pq+1$ となる。

（ロ）自然数 n が存在して $a,\ b,\ c$ のいずれかは 2^n である。

（ハ）$\angle\mathrm{A}, \angle\mathrm{B}, \angle\mathrm{C}$ のいずれかは 60° である。

このとき次の問に答えよ。

(1) $\angle\mathrm{A}, \angle\mathrm{B}, \angle\mathrm{C}$ を大きさの順に並べよ。

(2) $a,\ b,\ c$ を求めよ。

(1)

$b-c = p-1 > 0$
$c-a = pq+1-p-q$
$= (p-1)(q-1) > 0$
より、$b > c > a$
よって
$\boxed{\angle\mathrm{B} > \angle\mathrm{C} > \angle\mathrm{A}}$

(2)

$3\angle\mathrm{B} > \angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = 180^\circ$
$\angle\mathrm{B} > 60^\circ$
$3\angle\mathrm{A} < \angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = 180^\circ$
$\angle\mathrm{A} < 60^\circ$
以上より、$\angle\mathrm{C} = 60^\circ$ である。
余弦定理より
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ$
これを整理すると
$1 = q^2 + p^2 + p^2q - pq^2 - pq$
$(q+1)(p^2 - qp + q - 1) = 0$
$q+1 \neq 0$ より
$p^2 - qp + q - 1 = 0$
$(p-1)(p+1-q) = 0$
$p-1 \neq 0$ より
$p+1-q = 0$
$q = p+1$
よって
$a = 2p+1,\ b = p(p+2),\ c = p(p+1)+1$
$2p,\ p(p+1)$ は偶数であるので、$a,\ c$ は奇数である。
よって $b = p(p+2) = 2^n$ であり、これを満たすのは $p = 2$ だけである。
以上より
$\boxed{a = 5,\ b = 8,\ c = 7}$ である。

5. a を実数とする。x の 2 次方程式 $x^2-ax=2\int_0^1|t^2-at|\,dt$ は $0\leqq x\leqq 1$ の範囲にいくつの解をもつか。

$f(x)=x^2-ax-2\int_0^1|t^2-at|\,dt$ とする。

$f(0)=-2\int_0^1|t^2-at|\,dt<0$ である。

(ア) $a\leqq 0$ のとき

$\int_0^1|t^2-at|\,dt$

$=\int_0^1(t^2-at)\,dt$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}a$

よって

$f(x)=x^2-ax+a-\dfrac{2}{3}$

$f(1)=\dfrac{1}{3}>0$

より解を 1 つだけもつ。

(イ) $0<a<1$ のとき

$\int_0^1|t^2-at|\,dt$

$=\int_0^a-(t^2-at)\,dt+\int_a^1(t^2-at)\,dt$

$=\dfrac{1}{3}a^3-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{3}$

よって

$f(x)=x^2-ax-\dfrac{2}{3}a^3+a-\dfrac{2}{3}$

$f(1)=-\dfrac{2}{3}a^3+\dfrac{1}{3}$

$f(1)\geqq 0$ つまり $a\leqq\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき解を 1 つだけもち、

$f(1)<0$ つまり $a>\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき解をもたない。

(ウ) $a\geqq 1$ のとき

$\int_0^1|t^2-at|\,dt$

$=\int_0^1-(t^2-at)\,dt$

$=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}a$

よって

$f(x)=x^2-ax-a+\dfrac{2}{3}$

$f(1)=\dfrac{5}{3}-2a<0$

より解をもたない。

以上より、x の 2 次方程式 $x^2-ax=2\int_0^1|t^2-at|\,dt$ は $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に

$\boxed{a\leqq\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\text{ のとき解を 1 つだけもち、}a>\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\text{ のとき解をもたない。}}$