１．

円：$(x-\frac{4}{3}a)^2+y^2=\frac{4}{9}a^2$ と直線：$3x+4y=2$ が接するときの a の条件

$y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ を円の方程式に代入する。

$(x-\frac{4}{3}a)^2+(-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2})^2=\frac{4}{9}a^2$

$\Leftrightarrow\frac{25}{16}x^2+(-\frac{8}{3}a-\frac{4}{3})x+\frac{4}{3}a^2+\frac{1}{4}=0$

$\Leftrightarrow(3\cdot5^2)x^2+(-2^7a-2^2\cdot3^2)x+2^6a^2+2^2\cdot3=0$

この x についての二次方程式の判別式を D とする。

$D=(-2^7a-2^2\cdot3^2)^2-2^2\cdot(3\cdot5^2)\cdot(2^6a^2+2^2\cdot3)=0$

$\Leftrightarrow2^{14}a^2+2^{10}\cdot3^2a+2^4\cdot3^4-2^8\cdot3\cdot5^2a^2-2^4\cdot3^2\cdot5^2=0$

$\Leftrightarrow2^8(2^6-3\cdot5^2)a^2+2^{10}\cdot3^2a+2^4\cdot3^2(3^2-5^2)1=0$

$\Leftrightarrow2^8(-11)a^2+2^{10}\cdot3^2a+2^4\cdot3^2(-16)1=0$

$\Leftrightarrow-11a^2+36a-9=0$

$\Leftrightarrow11a^2-36a+9=0$

$\Leftrightarrow a=3,\ \frac{11}{3}$

２．

$x=a+b,\ y=ab$ とするときの、x と y の取りうる範囲（ただし a, b は実数）

$\boxed{\text{解答 A（相加・相乗平均）}}$

相加・相乗平均の関係より

$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ （ただし a, b は正の数）

$\Leftrightarrow a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ 　両辺とも正の数なので 2 乗して

$\Leftrightarrow (a+b)^2 \geqq 4ab$ …①

a, b のどちらかが負の数のときは、①の左辺は正、右辺は負となり①は成り立つ。

a, b のどちらも負の数のときは、$A=-a,\ B=-b$ とおき、A と B について同様に相加・相乗平均の関係より

$(A+B)^2 \geqq 4AB$ 　$A=-a,\ B=-b$ を代入して

$\Leftrightarrow (-a-b)^2 \geqq 4ab$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 \geqq 4ab$

以上より a, b の正負にかかわらず①は成り立つので

$x^2 \geqq 4y$

$\boxed{\text{解答 B（二次方程式の判別式）}}$

a, b を 2 解とするような t についての二次方程式を考える

$(t-a)(t-b)=0$

$\Leftrightarrow t^2-(a+b)t+ab=0$

$\Leftrightarrow t^2-xt+y=0$ …①

①は a, b という 2 つの実数解（重解を含む）を持つので、①の判別式を D とすると

$D \geqq 0$

$x^2-4y \geqq 0$

$\boxed{\text{解答 C（直接示す）}}$

$(a-b)^2 \geqq 0$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geqq 0$

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2-4ab \geqq 0$

$\Leftrightarrow (a+b)^2-4ab \geqq 0$

$\Leftrightarrow x^2-4y \geqq 0$