1.　xy 平面内の領域

$$x^2 + y^2 \leqq 2, \quad |x| \leqq 1$$

で，曲線 $C : y = x^3 + x^2 - x$ の上側にある部分の面積を求めよ.

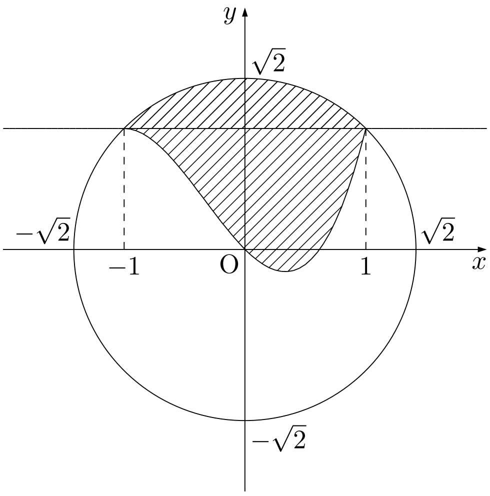
$y' = 3x^2 + 2x - 1$ より

$y' = 0$ のとき $x = -1, \dfrac{1}{3}$

増減表は以下の通りになる。

t	-1	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$-\dfrac{5}{27}$	$\nearrow$	1

グラフの概形は下図のようになり、斜線部の面積が求める面積である。



求める面積のうち、$y = 1$ の下側を S_1、上側を S_2 とする。

$S_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^3 - x^2 + 1) dx$

$= 2\displaystyle\int_{0}^{1} (1 - x^2) dx$

$= 2\left[x - \dfrac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$= \dfrac{4}{3}$

扇形から三角形の面積を引くことにより

$S_2 = \pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \dfrac{90}{360} - \dfrac{1}{2}(\sqrt{2})^2$

$= \dfrac{1}{2}\pi - 1$

以上より、求める面積は

$\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{2}\pi - 1$

$\boxed{= \dfrac{1}{2}\pi + \dfrac{1}{3}}$

2.　ボタンを押すと「あたり」か「はずれ」のいずれかが表示される装置がある.「あたり」の表示される確率は毎回同じであるとする．この装置のボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」の出る確率は 36 ％である．1 回以上「あたり」の出る確率が 90 ％以上となるためには，この装置のボタンを最低何回押せばよいか．必要なら $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ を用いてよい．

このボタンを 1 回押したときに「はずれ」が表示される確率を p とする ($0 \leqq p \leqq 1$)。
この装置のボタンを 20 回押したとき、1 回以上「あたり」の出る確率は 36%であるということは、1 回も「あたり」が出ない、つまり 20 回連続で「はずれ」が出る確率は 64%である。
よって $p^{20} = \dfrac{64}{100}$
1 回以上「あたり」の出る確率が 90%以上となるためには、この装置のボタンを最低 x 回押せばよいとする。そのような x は
$p^x \leqq \dfrac{10}{100}$ を満たす最小の自然数である。
この両辺の常用対数を取ると
$\log_{10} p^x \leqq \log_{10} \dfrac{10}{100}$
$x \log_{10} p \leqq -1$
$x \geqq -\dfrac{1}{\log_{10} p}$

$p^{20} = \dfrac{64}{100}$ の両辺の常用対数を取ると
$\log_{10} p^{20} = \log_{10} \dfrac{64}{100}$
$20 \log_{10} p = \log_{10} 64 - \log_{10} 100$
$20 \log_{10} p = 6 \log_{10} 2 - 2$
$\log_{10} p = \dfrac{3}{10} \log_{10} 2 - \dfrac{1}{10}$

$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ より
$0.09030 < \dfrac{3}{10} \log_{10} 2 < 0.09033$
$-0.00970 < \dfrac{3}{10} \log_{10} 2 - \dfrac{1}{10} < -0.00967$
$-0.00970 < \log_{10} p < -0.00967$
$0.00967 < -\log_{10} p < 0.00970$
$\dfrac{10000}{97} < -\dfrac{1}{\log_{10} p} < \dfrac{100000}{967}$
$103.09... < -\dfrac{1}{\log_{10} p} < 103.41...$

以上より、$x \geqq -\dfrac{1}{\log_{10} p}$ を満たす最小の自然数 x は 104 である。

1 回以上「あたり」の出る確率が 90%以上となるためには、この装置のボタンを最低 $\boxed{104}$ 回押せばよい。

3.　n を 4 以上の自然数とする．数 2，12，1331 がすべて n 進法で表記されているとして，

$$2^{12}=1331$$

が成り立っている．このとき n はいくつか．十進法で答えよ．

n 進法の 2 は十進法の 2、12 は $n+2$、1331 は n^3+3n^2+3n+1 である。
よって条件の式を十進法で書きかえると
$2^{n+2}=n^3+3n^2+3n+1$
$2^{n+2}=(n+1)^3$
よって、$n+1=2^k$ (k は自然数) と表すことができる。
これと $n=2^k-1$ より
$2^{2^k+1}=2^{3k}$
$2^k+1=3k\cdots$①
$n=2^k-1\geqq 4$ より
$k\geqq 3$
$k=3$ は ① を満たす。
$f(k)=2^k+1-3k$ とする。
$f(k+1)-f(k)=2^{k+1}+1-3(k+1)-2^k-1+3k$
$=2^k-3$
>0 ($\because k\geqq 3$)
より ① を満たすのは $k=3$ のみである。
このとき、$n=2^3-1=7$ である。

4.　四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ．

条件： 頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の重心を通る．

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。

三角形 OBC, OCA, OAB の重心をそれぞれ G, H, I とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

条件より、$AG \perp OB,\ AG \perp OC$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \cdots ①$

$\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3}|\vec{c}|^2 = 0 \cdots ②$

同様に

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \cdots ③$

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3}|\vec{c}|^2 = 0 \cdots ④$

$\overrightarrow{\mathrm{CI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdots ⑤$

$\overrightarrow{\mathrm{CI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3}|\vec{b}|^2 = 0 \cdots ⑥$

① − ⑥ より

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}$

② − ④ より

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = t$ とおくと

①, ②, ③ より

$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 2t$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

$= 2t$

同様に

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = 2t$

以上より、四面体 OABC のすべての辺の長さが等しいので、これは正四面体である。

5. 実数を係数とする 3 次式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ に対し，次の条件を考える．

（イ） 方程式 $f(x) = 0$ の解であるすべての複素数 α に対し，α^3 もまた $f(x) = 0$ の解である．

（ロ） 方程式 $f(x) = 0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ．

この 2 つの条件（イ），（ロ）を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ．

虚数解を β とすると、その共役な複素数 $\overline{\beta}$ も $f(x) = 0$ の解である。残りの一つの解は実数であり、これを r とする。
実数の 3 乗は実数なので $r^3 = r$ でなければならない。
これを解くと $r = 0, \pm 1$
$\beta^3 = \beta$ となることはない。
s, t を実数として、$\beta = s + ti$ $(t \neq 0)$ とすると

(ア) $\beta^3 = (\overline{\beta})$ のとき
$\beta^3 = s^3 + 3s^2ti - 3st^2 - t^3i$
$= (s^3 - 3st^2) + (3s^2t - t^3)i$
$\overline{\beta} = s - ti$ なので
$$\begin{cases} s^3 - 3st^2 = s \cdots ① \\ 3s^2t - t^3 = -t \cdots ② \end{cases}$$
② より
$3s^2 - t^2 + 1 = 0$
$t^2 = 3s^2 + 1$
これを ① に代入して
$s(-8s^2 - 4) = 0$
$s = 0$
$t = \pm 1$
3 つの解は
$(0, i, -i), (1, i, -i), (-1, i, -i)$ である。

(イ) $\beta^3 = r$ のとき
$3s^2t - t^3 = 0$
$3s^2 - t^2 = 0$
$t^2 = 3s^2$
$r = 0$ のとき
$s^3 - 9s^3 = 0$
$s = 0$
これは $t = 0$ となるので不適
$r = 1$ のとき
$s^3 - 9s^3 = 1$
$(2s + 1)(4s^2 - 2s + 1) = 0$
$s = -\frac{1}{2}$
$t = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
3 つの解は
$(1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})$ である。
$r = -1$ のとき
$s^3 - 9s^3 = -1$
$(2s - 1)(4s^2 + 2s + 1) = 0$
$s = \frac{1}{2}$
$t = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
3 つの解は
$(-1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})$ である。

これらの解は 2 つの条件を満たす。
以上より、求める 3 次式は以下の通りである。
$x(x + i)(x - i) = x^3 + x$
$(x - 1)(x + i)(x - i) = x^3 - x^2 + x - 1$
$(x + 1)(x + i)(x - i) = x^3 + x^2 + x + 1$
$(x - 1)(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = x^3 - 1$
$(x + 1)(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = x^3 + 1$