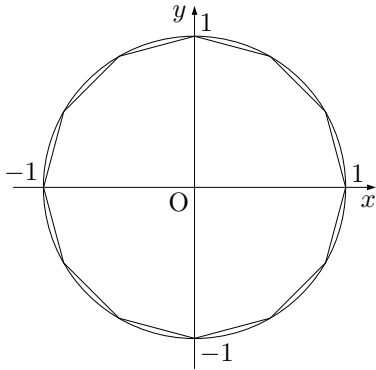


1. 円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。

(03 東京大)

円周率 ( $\pi$ ) とは  $\frac{\text{円周}}{\text{直径}}$  のことであり、円周 = 直径  $\times \pi$  である。

図のように半径が 1 の円に内接する正 12 角形を考える。



この正 12 角形の 1 辺の長さを  $x$  とすると、余弦定理より

$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos 30^\circ$$

$$x^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$x > 0$  より

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

円周の長さはこの正 12 角形の周の長さより大きいので

$$2\pi > 12\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\pi > 6\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

よって

$$\pi^2 > 36(2 - \sqrt{3}) \cdots \textcircled{1}$$

$\pi > 3.05$  は  $\pi^2 > 3.05^2 = 9.3025$  と同値であるので、以下ではこれを示す。

$$3 < 1.74^2 \text{ より}$$

$$\sqrt{3} < 1.74$$

$$-\sqrt{3} > -1.74$$

$$2 - \sqrt{3} > 0.26$$

$$36(2 - \sqrt{3}) > 9.36$$

これと  $\textcircled{1}$  より

$$\pi^2 > 36(2 - \sqrt{3}) > 9.36 > 9.3025$$

以上より、円周率 ( $\pi$ ) は 3.05 より大きい。